ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option TA)

*
**

CONCOURS D'ADMISSION 1984

***

MATHÉMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION T.A.

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - T.A.

Le problème comporte deux parties indépendantes.

Les fonctions considérées dans ce problème seront définies dans un intervalle $I_R =]-R, R[$ $(R > 0)$ ou dans $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles ; il sera posé pour une telle fonction f :

$$f^* : \quad x \longmapsto f(-x) \; ; \quad \text{ainsi : } f^{*\prime} = - f'^*.$$

$$f_p = \frac{1}{2}(f+f^*), \quad f_I = \frac{1}{2}(f-f^*)$$

c'est-à-dire :

$$f^*(x) = f(-x) \; ; \; \frac{d}{dx} f(-x) = - f'(-x) \; ;$$

$$f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad f_I(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

1ère PARTIE

1°) Soit l'équation différentielle :

$$(P) \qquad y' + a.y = f \quad ,$$

a et f sont des fonctions continues définies sur un intervalle I_R ; y est une fonction inconnue continûment dérivable. La fonction a est impaire. Montrer que, si la fonction f est impaire, l'équation (P) admet une seule solution y, définie dans I_R, paire, qui vérifie $y(0) = \alpha$ (α réel donné). De même, montrer que, si f est paire, l'équation (P) admet une seule solution impaire définie dans I_R.

Indication : considérer d'abord la fonction $z = y - y^*$; puis $z = y + y^*$.

Soit le système différentiel :

$$(Q) \qquad \begin{cases} y_1' = a.y_2 + f, \\ y_2' = b.y_1 + g. \end{cases}$$

Les fonctions a, b, f et g sont définies et continues sur un intervalle I_R ; les fonctions y_1 et y_2, continûment dérivables, sont inconnues.

Montrer que, lorsque les fonctions a, b et g sont paires et la fonction f impaire, il existe un seul couple de fonctions (y_1, y_2) solution de ce système tel que y_1 est paire, y_2 impaire et tel que $y_1(0) = \alpha$ (α réel donné).

.../...

2°) Soit l'équation :

$$(E) \qquad y' + a.y + b.y^* = f$$

où a, b, f sont des fonctions continues définies sur un intervalle I_R et y une fonction inconnue continûment dérivable.

a) Les fonctions a et b sont supposées impaires. Montrer que, si la fonction y vérifie l'équation (E), les fonctions y_p et y_I vérifient respectivement des équations différentielles très simples (E_p) et (E_I), dans lesquelles figurent les fonctions a, b, f_p et f_I.

Est-ce que, réciproquement, étant données une fonction y_1 paire vérifiant (E_p), et une fonction y_2 impaire vérifiant (E_I), la fonction $y = y_1 + y_2$ vérifie (E) ?

En déduire que l'équation (E) admet une seule solution y dans I_R telle que $y(0) = \alpha$ (α réel donné).

b) Les fonctions a et b sont supposées paires. Montrer que, si la fonction y vérifie l'équation (E), les fonctions y_p et y_I vérifient un système différentiel (S) linéaire très simple dans lequel figurent les fonctions a, b, f_p et f_I.

En déduire qu'il existe une seule solution y de l'équation (E) telle que $y(0) = \alpha$ (α réel donné).

c) Les fonctions a et b sont constantes et f est continûment dérivable. Montrer que, si la fonction y vérifie l'équation (E), cette fonction y est deux fois continûment dérivable et vérifie une équation différentielle (E') du second ordre à coefficients constants, où figurent les constantes a et b et la fonction f.

Réciproquement, est-ce qu'une fonction y vérifiant cette équation différentielle (E') vérifie l'équation (E) ? Considérer une solution y de (E') et montrer que la fonction u définie par :

$$u = y' + ay + by^* - f$$

vérifie la relation :

$$u' - au + bu^* = 0.$$

3°) Déterminer la solution, définie sur $\mathbb{R}$, de l'équation :

$$y'(x) + 3\,x\,y(x) - x\,y(-x) = x\left(\frac{1}{1+x^2} + \ln(1+x^2)\right),$$ qui vérifie la condition :

$$y(0) = \alpha \ (\alpha \text{ réel donné}).$$

4°) Soit l'équation :

$$(F) \qquad y'' + ay + by^* = f,$$

où a et b sont deux constantes et f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$; y est une fonction inconnue deux fois continûment dérivable.

Montrer que, si la fonction y est solution de (F), les fonctions y_p et y_I sont solutions d'équations différentielles (F_p) et (F_I) respectivement, du second ordre à coefficients constants très simples.

Montrer que l'équation différentielle (F_p) admet une seule solution y_1, fonction paire, qui vérifie $y_1(0) = \alpha$ (α réel donné) ; de même, l'équation différentielle (F_I) admet une seule solution y_2, fonction impaire, qui vérifie $y_2'(0) = \beta$ (β réel donné). En déduire que l'équation (F) admet une seule solution y qui vérifie les relations :

$$y(0) = \alpha \ ; \quad y'(0) = \beta \ ; \quad \alpha, \beta \text{ réels donnés.}$$

5°) Déterminer la solution de l'équation :

$$y''(x) + y(x) - 3y(-x) = \cos(2x) + \sin(2x),$$

qui vérifie les conditions :

$$y(0) = \alpha \ ; \quad y'(0) = \beta \ ; \quad \alpha, \beta \text{ réels donnés.}$$

.../...

2ème PARTIE

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble de toutes les suites réelles : $S = (s_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ A toute suite S, associons la série entière de terme général :

$$u_n = \frac{s_n}{n!} x^n \quad , \quad n = 0, 1, \ldots$$

Si le rayon de convergence $R(S)$ de cette série est strictement positif, désignons par F_S la fonction somme de cette série :

$$\forall x \in I_{R(S)} , \qquad F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} x^n.$$

Soit $\mathscr{S}_1$, le sous-ensemble de $\mathscr{S}$ des suites pour lesquelles le rayon de convergence $R(S)$ est strictement positif.

1°) Montrer l'équivalence :

$$S \in \mathscr{S}_1 \iff \exists A > 0, \exists a > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |s_n| \leqslant A.a^n.(n!).$$

En déduire :

$$S \in \mathscr{S}_1 \implies \exists B > 0, \exists b > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |s_{n+1}| \leqslant B.b^n.(n!).$$

2°) Soient quatre réels α, α', β, β' donnés; soit $S = (s_n)$, une suite de $\mathscr{S}$ et soit T la suite définie par le réel t_o donné, et les relations :

$$t_1 + (\alpha + \alpha')\, t_o = s_o,$$

$$\forall n = 1, 2, \ldots, \quad t_{n+1} + [\alpha + (-1)^n \alpha']\, t_n + n\,[\beta + (-1)^{n-1} \beta']\, t_{n-1} = s_n.$$

a) Montrer l'inégalité : $R(T) \leqslant R(S)$.

b) Montrer l'équivalence : $S \in \mathscr{S}_1 \iff T \in \mathscr{S}_1$.

Indication : Pour démontrer l'une de ces implications, montrer par récurrence l'inégalité de la question 1°)

c) Soit $S \in \mathscr{S}_1$; montrer que la fonction F_T, définie dans l'intervalle $I_{R(T)}$, est une solution des équations :

$$\forall x \in I_{R(T)} , \quad y'(x) + (\alpha + \beta x)\ y(x) + (\alpha' + \beta' x)\, y(-x) = F_S(x), \quad y(0) = t_o.$$

3°) Soient α et β deux réels donnés ; soit $S = (s_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ une suite de $\mathscr{S}$ et soit $T = (t_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ la suite définie par les réels t_o, t_1, donnés, et la relation :

$$\forall\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad t_{n+2} + [\alpha + (-1)^n \beta]\, t_n = s_n.$$

a) Montrer $R(T) \leqslant R(S)$.

b) Montrer l'équivalence : $S \in \mathscr{S}_1 \iff T \in \mathscr{S}_1$.

c) Soit $S \in \mathscr{S}_1$; montrer que la fonction F_T, définie dans $I_{R(T)}$, est solution des équations :

$$\forall x \in I_{R(T)}, \quad y''(x) + \alpha\, y(x) + \beta\, y(-x) = F_S(x), \quad y(0) = t_o, \quad y'(0) = t_1.$$